Introduction - Digital Filters (INCT)

　音声や画像などをパソコンなどの計算機上で扱う場合、サンプリングされた信号として取り扱うことになる。このような形態で信号を取り扱う手法は、ディジタル信号処理技術として知られている。現在では、情報通信の分野はもちろん、広く工学分野において、ディジタル信号処理に関する理解が欠かせなくなってきている。

　そこで、本テーマではディジタル信号処理技術の基礎の一つである ディジタルフィルタを理解することを目的とする。具体的には、インパルス応答からディジタルフィルタの特性を計算する方法や、信号のフィルタリング処理(畳み込み演算)手順を理解し、プログラム の実装を行う。

Overview of Digital Filters (INCT)

線形シフト不変システムとインパルス応答

ディジタル信号処理を実行する処理ブロックのモデルとして、図1に示すブロック図を考える。

システムの入出力関係

図1で、 $x(n)$ および$y(n)$ をそれぞれ入力信号および出力信号とする。 ここで、$x(n)$から $y(n)$ を生じる処理ブロックを、システムと呼ぶことにする。 システムが線形性、シフト不変性[1]などの条件を満たすとき、このシステムを 線形シフト不変システムという。 また、システムを実時間処理で実現するには、 因果性[1]が要求される。本テーマで扱うシステムはすべて因果性を満たす ものとする。

線形シフト不変システムにディジタル単位インパルス $\delta(n)$

Equation:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

を入力したときの出力 $h(n)$ を、インパルス応答と定義する。 インパルス応答は、システムの性質を示す重要な値である。

畳み込み演算とディジタルフィルタ

あるシステムが線形性とシフト不変性を満たす場合、そのシステムのインパルス応答 $h(n)$ が与えられれば、任意の入力 $x(n)$ に対する出力 $y(n)$ は、式(2)により計算することができる。

Equation:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

さらに、ある入力信号に対して畳み込み演算を実行することにより、入力信号からある特定の周波数成分だけを抜き出すなどのフィルタ効果があることが知られている。加えてこのフィルタ効果は、インパルス応答を変化させることにより様々に変化させることができる。このことから、畳み込み演算を実行するシステムは、ディジタルフィルタともよばれている。インパルス応答が有限時間だけ持続するシステムをFIR(Finite Impulse Response)システム(またはFIRフィルタ)、無限時間持続するフィルタのことをIIR(Infinite Impulse Response)システム(またはIIRフィルタ)と分類している。本テーマでは、FIRフィルタを扱うこととする。

インパルス応答と周波数特性

以上のようなフィルタ効果を与えるシステムの特性を、そのシステムの周波数特性として表現することができる。インパルス応答 $h(n)$ を有するシステムの周波数特性 $H(e^{j\omega})$ は、ω を正規化角周波数として、次式で定義される。

Equation:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

システムがFIRフィルタの場合、インパルス応答 $h(n)$ は有限時間しか持続しない。また、因果性を満たすシステムの場合、因果性の定義より、$h(n) = 0(n < 0)$ であるので、因果性を満足しインパルス応答長が N であるFIRシステムの周波数特性は次式となる。

Equation:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

N のことをフィルタ長ということもある。

周波数特性の計算

　周波数特性には、その大きさを表す振幅特性と、入出力信号間の位相の変化を 表す位相特性とがある。また、位相特性を別の形で表現した特性として、 群遅延特性がある。

(4)式より、振幅特性 $H(e^{j\omega})$ は、以下のように実部と虚部に分けて表すことができる。

Equation:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \omega n + j \left\{ - \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin \omega n \right\}$$

ここで、右辺第一項は実部、右辺第二項は虚部である。よって振幅特性 $H(e^{j\omega})$ の絶対値は、(5)式の絶対値をとって以下のように計算できる。

Equation:

$$\left| H(e^{j\omega}) \right| = \sqrt{R_e^2 + I_m^2}$$

式(6)で R_e および I_m は、それぞれ(5)式における実部と虚部を表すものとする。振幅特性の大きさは、しばしば[dB]で表示される。この場合の振幅(ampitude) [dB]は、常用対数をとって次式で表される。

Equation:

$$20 \log_{10} \left| H(e^{j\omega}) \right|$$

(7)式で、正規化角周波数ωを細かく変化させて ω を横軸、振幅特性を縦軸としてグラフに示せば、振幅特性の グラフを得ることができる。また、周波数を正規化周波数 $f=\frac{\omega}{2\pi}$ で表現することも多い。正規化周波数 f は、周波数 F [Hz]をサンプリング周波数 F_s [Hz]で割った値である。

位相特性 $\theta(\omega)$ は、振幅特性 $H(e^{j\omega})$ を極座標表示したときの偏角である。 数値計算により $\theta(\omega)$ の値を求める場合には、次式を用いることができる（ただし、その処理系での逆正接関数 ーたとえば atan()関数ー の主値の範囲について理解しておくことが必要であろう）。

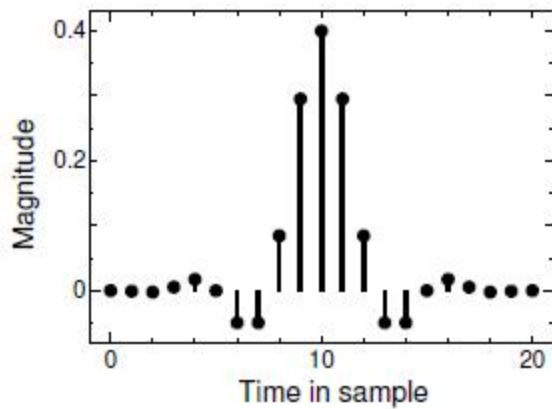
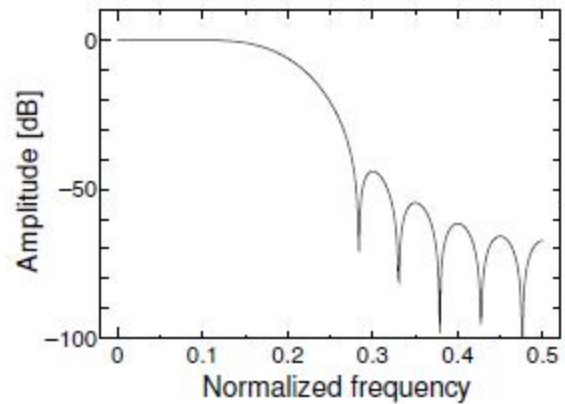
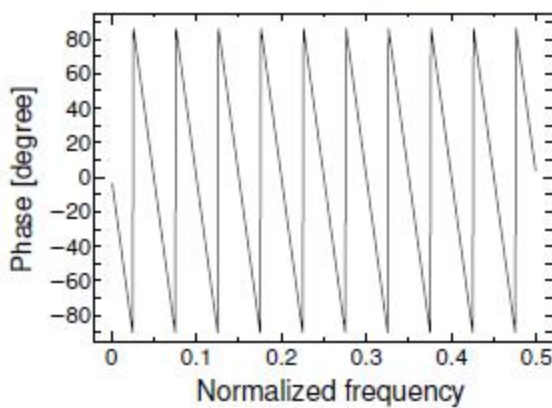
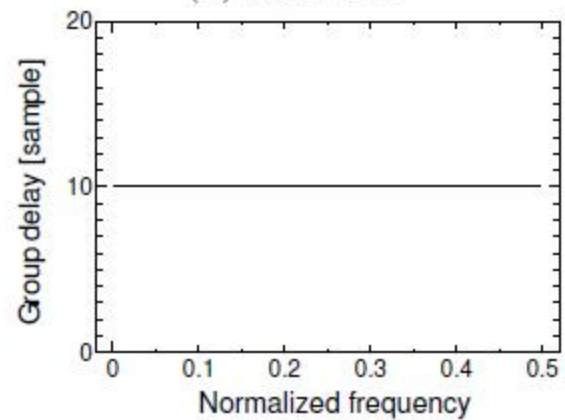
Equation:

$$\theta(\omega) = \tan^{-1} \frac{I_m}{R_e} \quad [rad]$$

さらに、群遅延特性 τ の定義は、位相特性の傾きとして次式で与えられる。

Equation:

$$\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad [Sample]$$

以上をまとめると、インパルス応答 $h(n)$ の値が既知ならば、周波数特性(振幅、 位相、群遅延特性)を計算できることになる。あるインパルス応答について、実際に周波数特性を計算した例 を図2に示す。図2(a)がインパルス応答で、図2(b)から(d)がそれぞれ振幅、 位相、群遅延特性である。

周波数特性の計算例

伝達関数についての補足

式(2)をz変換すると、次式となる。
Equation:

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

上式の $H(z)$ を伝達関数と呼ぶ。伝達関数 $H(z)$ はインパルス応答 $h(n)$ の z 変換 であり、 ディジタルフィルタの入出力関係を z 領域

で表した式である。式(3)と式(11) を比較すると、畳み込み演算が z 領域では積で表現できることがわかる。

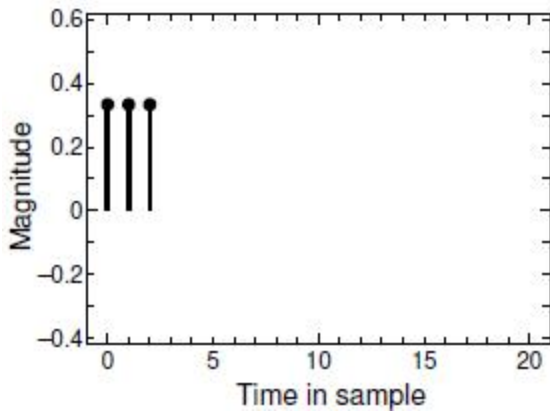
ここで、上式に $z = e^{j\omega}$ を代入すると次式となる。

Equation:

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

$X(e^{j\omega})$ および $Y(e^{j\omega})$ は、それぞれ入力信号 $x(n)$ および出力信号 $y(n)$ の離散時間フーリエ変換(周波数スペクトル)である。式(11)は、畳み込み演算 を周波数領域で表現した式に相当する。

Analysis and Implementation of Digital Filters - (INCT)

[課題１]　下図に示すインパルス応答　　　を有する、インパルス応答長　　　のFIRシステム　　　　　　　　　　　を考える。

インパルス応答(N=3)

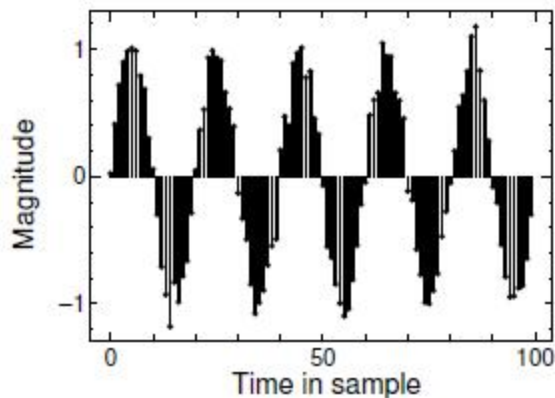
このとき、以下の手順でこのシステムを解析し、振幅特性を計算せよ。 また、上図のインパルス応答を持つFIRディジタルフィルタとして実現せよ。

(1)システムのブロック図を示せ。

(2)インパルス応答　　　からシステムの振幅特性を計算し、 グラフとして表示せよ。ただし、横軸は正規化周波数、縦軸は[dB]とする。

(3)信号データ(ファイル名: [missing_resource: signal.txt]　　として 与える。　　は、100個のサンプル値からなる信号である(Figure 2)。計算機上のグラフツールを用いてこの信号を図示したとき、Figure 2のようになることを 確認せよ(Figure 2は、サンプル値を強調するため、棒グラフ状に表示しているが、 折線グラフで表示してもよい)。

(4)x(n)を入力信号としてこのシステムに加え、FIRフィルタリングを行なっ た出力y(n)を求めるプログラムを作成せよ。

(5)　　をFigure 2のような形式で図示し、入力信号との波形の変化を考察せよ。

入力として使用するサンプル値信号

以上を含む内容を、インパルス応答　　　　　　　　　　　　を有するFIRフィルタのシミュレーション結果として整理して報告せよ。

ただし、結果の報告の方法には注意し、自らが問題意識を持って実験を行ない報告する、という立場から内容を整理して報告すること。

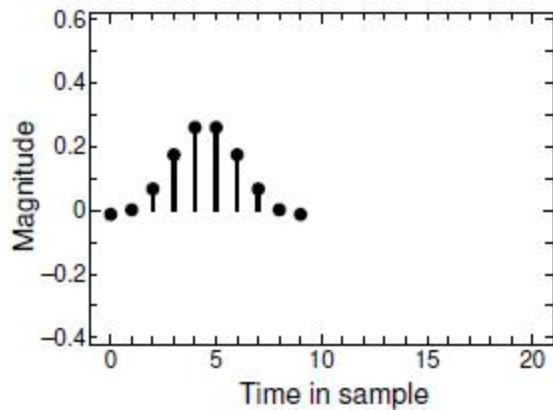
・何を目的として、どのような内容の実験を行なおうとしているレポート

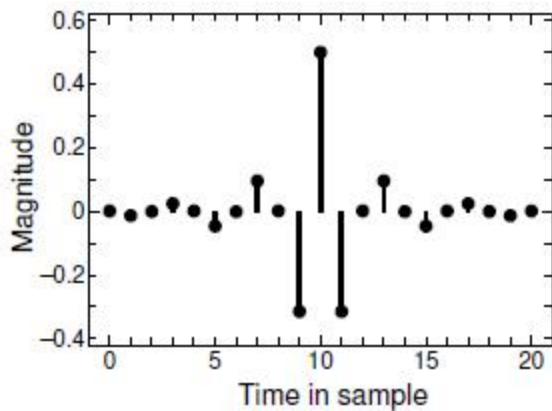
・どのようなブロック図のシステムで、どのような処理を実行しているの

・どのような信号を加え、どのような処理結果を得たのか。

・その結果、どのようなことが言えるのか。

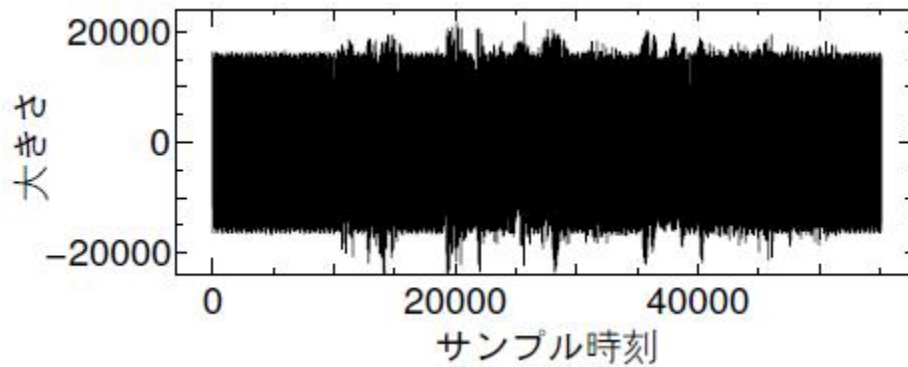
上記のような点に注意を払い、報告書を作成のこと。

[課題２]以下の図に示すインパルス応答(ファイル名:
[missing_resource: h10.txt]

インパルス応答(N=10)

[課題３] 課題2と同様に、以下の図に示すインパルス応答(ファイル名: [missing_resource: h21.txt]

インパルス応答(N=21)

[課題４] 音声信号(男声)に周波数4[kHz]の正弦波信号が妨害信号として加えられたFigure 5に示す信号がある。この信号から妨害信号を取り除き、音声信号のみを取り出したい。適切なFIRフィルタを設計し、これまでの課題で作成した たたみ込み計算プログラム(フィル

タリングプログラム)により妨害信号を取り除いた信号を生成せよ。なお、この信号のサンプリング周波数はFs=11.025[kHz]である。

※なお、この課題については追加資料を配布しますので、参考にして下さい。

正弦波信号が妨害信号として付加された音声信号波形(Fs=11.025[kHz])

Assignments - Digital Filters (INCT)

(1)図4の入力信号は、正弦波に雑音を加えた信号をサンプリングした信号である。図4の横軸をよくみるとわかるように、この信号は正弦波1周期を20点でサンプリングしている。この正弦波のディジタル周波数(正規化周波数)を示せ。

(2)各課題でのFIRフィルタの振幅特性から、FIRフィルタリング前後の信号波形の変化をできるだけ定量的に説明せよ(x(n)とy(n)について、信号の大きさ・波形の変化を比較する)。

(3)FIRフィルタとIIRフィルタの特徴を調べ、比較せよ。

(4)インパルス応答の値をさまざまに変えることで、特性の異なるフィルタを実現できる。希望の処理を行うために適切なインパルス応答の値を決定することが、ディジタルフィルタの設計に相当する。どのようなディジタルフィルタ設計法が あり、それぞれどのような特徴を持つかを調べてみよ。

(5)感想を記せ。

Advanced Problems - Digital Filters (INCT)

(1)インパルス応答から位相特性を計算するプログラムを作成せよ。ただし、 $\tan^{-1} \frac{0}{0}$ が数学的に未定義であることに注意してプログラムを作成しないと、振幅の値がゼロに近づく周波数でプログラムが実行時エラーを起こす場合がある。

(2)インパルス応答から群遅延特性を計算するプログラムを作成せよ。この 結果から、 ( ) と ( ) の波形の時間的なずれを定量的に考察せよ

(3)位相特性と群遅延特性は、実質的に同じことを異なる表現で示しているにすぎないことを、実験結果から考察せよ。

(4)http://momiji.i.ishikawa-nct.ac.jpにより、各種のFIRおよびIIRディジタルフィルタが設計可能である。様々なフィルタの設計を行なってみよ。また、得られたフィルタ係数を利用して、ディジタルフィルタを実現せよ。